УДК 517.95

С. П. Лавренюк

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ

В работе построены классы единственности решений задачи без начальных условий для эволюционной системы

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (A_{\alpha\beta}(x, t) D_x^\beta u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} B_\alpha(x, t) D_x^\alpha u + C(x, t) u_t +$$

$$+ G(x, t) z = F(x, t)$$

в области $Q_m = \{(x, t) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, -\infty < t < T < \infty\}$, где $A_{\alpha\beta}$, B_α, C, G — квадратные матрицы, а вектор z имеет координаты $|u_i|^{p_i-2} u_i$, $i = 1, \ldots, k$, $p_i > 2$.

В случае постановки корректных задач для эволюционных систем одним из важных условий является задание начального состояния объекта, который моделируется рассматриваемой системой. Если исследователя интересует состояние объекта в момент времени, достаточно удаленный от начального, то во многих случаях влияние начального состояния на процесс почти не ощущается. В частности, это справедливо для нелинейных параболических уравнений [1], которые описывают процессы фильтрации. Тогда можно считать, что начальный момент равен $-\infty$, и изучать процесс в зависимости от режима на границе области, в которой он происходит, а также от внешних условий.

В предлагаемой работе рассматривается задача без начальных условий для одной эволюционной системы уравнений, которая содержит, в частности, уравнение поперечных колебаний балки [2], а также известное уравнение из релятивистской квантовой механики [3] и систему гиперболических уравнений второго порядка.

Заметим, что наиболее полно исследованы задачи без начальных условий для параболических уравнений и систем. Достаточно полную библиографию по этому вопросу содержат работы [1, 4]. Кроме того, задачи без начальных условий исследовались в [5—8].

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в области $Q_T = \Omega\times\mathcal{I}$, где $\mathcal{I} = (-\infty, T)$, $T<\infty$, систему уравнений

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x, t) D^\beta u) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} B_\alpha(x, t) D^\alpha u + C(x, t) u_t + G(x, t) z = F(x, t). \qquad (1)$$

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $F(f_1, \ldots, f_k)$, а $A_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant m$, $B_\varkappa$, $1\leqslant|\varkappa|\leqslant \leqslant m$, C, G — квадратные матрицы размера $k\times k$, причем $G(x, t) = = \operatorname{diag}\{g_1(x, t), \ldots, g_k(x, t)\}$, z — вектор-столбец с координатами $|u_i|^{p_i-2} u_i$, $i = 1, \ldots, k$; $m\geqslant 1$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Кроме того, $g_i(x, t)\equiv 0$, $i\in M_2\subset\{1, \ldots, k\}$; $p_i = 2$, $i\in M_2$, $p_j > 2$, $j\in M_1 = \{1, \ldots, k\}\setminus M_2$.

Пусть $S_T = \partial\Omega\times\mathcal{I}$ — боковая поверхность цилиндра Q_T. Для системы (1) зададим краевые условия Дирихле

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial\nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \ldots, m-1, \qquad (2)$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Для исследования задачи (1), (2) введем банахово рефлексивное сепарабельное пространство

$$V = \prod_{i=1}^{k} (\overset{0}{H}{}^m(\Omega) \cap L^{p_i}(\Omega))$$

с нормой

$$\|v\|_V = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j\in M_1} \left(\int_\Omega |v_j|^{p_j}\, dx\right)^{\frac{1}{p_j}},$$

а также пространства

$$\overset{0}{H}{}^m_k(\Omega) = \prod_{i=1}^{k} \overset{0}{H}{}^m(\Omega), \; L^2_k(\Omega) = \prod_{i=1}^{k} L^2(\Omega).$$

Не ограничивая общности, предположим, что $T<0$. Будем считать, что для коэффициентов системы (1) имеют место следующие условия:

1) $A_{\alpha\beta}(x, t) = A_{\beta\alpha}(x, t)$, $A_{\alpha\beta}(x, t) = A'_{\alpha\beta}(x, t)$, $|\alpha| = |\beta|\leqslant m$, $(x, t)\in Q_T$ (здесь $A'_{\alpha\beta}$ — матрица, транспонированная к $A_{\alpha\beta}$);

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta} D^\beta v, D^\alpha v)\, dx \geqslant a_0 \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2\, dx,$$

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta} D^\beta v, D^\alpha v)\, dx \leqslant a_1(t) \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2\, dx,$$

$t\in\mathcal{I}$, $a_0>0$, v — любая функция из $\overset{0}{H}{}^m_k(\Omega)$ $\left(\text{здесь } (\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i\eta_i\right)$;

2) $(C(x, t)\xi, \xi) \geqslant c_0 |\xi|^2$, $(x, t) \in Q_T$ для произвольного $\xi \in \mathbb{R}^k$, $c_0 = \text{const}$;

3) $q_0 \leqslant g_j(x, t) \leqslant \bar{q}_0$, $(x, t) \in Q_T$, $j \in M_1$, $q_0 > 0$.

Введем следующие обозначения:

$$b_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| B_\alpha(x, \tau)\|^2;$$

$$b_1(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| B_{\alpha t}(x, r)\|^2;$$

$$\bar{c}_0(t) = \sup_{Q_t} \| C(x, \tau)\|, \quad c_2 = \inf_{J} \bar{c}_0(t); \quad c_1(t) = \sup_{Q_t} \| C_t(x, \tau)\|.$$

Заметим, что для функций $v \in \overset{0}{H}{}^m(\Omega)$ справедливы неравенства Фридрихса [9]

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2 dx \leqslant \gamma_{m,j} \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2 dx, \quad j = 0, \ldots, m, \tag{3}$$

где постоянные $\gamma_{m,j}$ зависят лишь от Ω, m и n, а также теорема вложения Соболева [9]

$$\| v\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \nu_2 \| v\|_{\overset{0}{H}{}^m(\Omega)}. \tag{4}$$

Здесь постоянная ν_2 зависит также от Ω, m и n, а $1 \leqslant q \leqslant \frac{2n}{n-2m}$, если $n > 2m$, и $q \geqslant 1$, если $n \leqslant 2m$. Положим $\gamma_0 = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{m,i}$.

Теорема 1. Пусть $A_{\alpha,\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$, $B_\varkappa$, $B_{\varkappa t}$, C, C_t, $G \in L^\infty(Q_T)$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant m$, $1 \leqslant |\chi| \leqslant m$, $\lim_{t \to -\infty} a_1(t) = 0$; $\lim_{t \to -\infty} b_i(t) = 0$, $i = 0, 1$; $\lim_{t \to -\infty} c_1(t) = 0$; $\partial\Omega \in C^1$; $p_j - 2 \leqslant \frac{2m}{n-2m}$, если $n > 2m$, и $p_j > 2$, если $n \leqslant 2m$, $j \in M_1$; выполняются условия 1)—3), причем $c_0 > 0$.

Тогда если $M_1 \neq \varnothing$, то задача (1), (2) не может иметь более одного решения в классе функций $u(x, t)$, таких, что

$$u \in L^\infty(\mathscr{I}; V), \quad u_t \in L^\infty(\mathscr{I}; L_k^2(\Omega)),$$

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x, t)|^2 dx \to 0, \text{ если } t \to -\infty.$$

Если же $M_1 = \varnothing$, то задача (1), (2) не может иметь более одного решения в классе функций $u(x, t)$, таких, что

$$ue^{\frac{\nu_0 t}{2}} \in L^\infty(\mathscr{I}; V), \quad u_t e^{\frac{\nu_0 t}{2}} \in L^\infty(\mathscr{I}; L_k^2(\Omega)),$$

где $\nu_0 < \frac{2c_0 a_0}{3a_0 + c_2\gamma_0}$.

Доказательство. Пусть сначала $M_1 \neq \varnothing$ и $u(x, t)$, $v(x, t)$ — два решения задачи (1), (2), принадлежащие классу функций, указанному в теореме. Тогда функция $w = u - v$ является решением системы

$$w_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta| \leqslant m} (-D)^2 (A_{\alpha\beta} D^\beta w) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} B_\alpha D^\alpha w + Cw_t + G(z^1 - z^2) = 0, \tag{5}$$

где z^1 — вектор с координатами $|u_i|^{p_i - 2} u_i$, а z^2 — вектор с координатами $|v_i|^{p_i - 2} v_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Введем вспомогательную функцию

$$\psi(x, t) = \begin{cases} e^{\mu t} \int_t^\tau w(x, \theta)\, d\theta, & -\infty < t < \tau, \ \mu > 0, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Если теперь умножим систему (5) скалярно на функцию $\psi(x, t)$ и проинтегрировать по области $Q_{t_0,\tau} = \Omega \times (t_0, \tau)$, $t_0 < \tau \leqslant T$, то получим равенство

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[(w_{tt}, \psi) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta} D^\beta w, D^\alpha \psi) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (B_\alpha D^\alpha w, \psi) + (C w_t \psi) +$$

$$+ \sum_{j\in M_1} g_j (|u_j|^{p_j-2} u_j - |v_j|^{p_j-2} v_j) \psi_j \Big] dxdt = 0. \tag{6}$$

Преобразуем и оценим каждое слагаемое в (6) отдельно. Учитывая условия теоремы и неравенства (3), получаем.

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (w_{tt}, \psi)\, dxdt \geqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_0}} |w_t|^2 e^{\mu t_0} dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |w|^2 e^{\mu\tau} dx -$$

$$- \frac{(\mu+1)}{2} \int\limits_{\Omega_{t_0}} |w|^2 e^{\mu t_0} dx - \frac{3\mu}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |w|^2 e^{\mu t} dxdt +$$

$$+ \frac{\mu^3}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big| \int\limits_t^\tau w d\theta \Big|^2 e^{\mu t} dxdt + \frac{(\mu^2 - \mu - 1)}{2} \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big| \int\limits_{t_0}^\tau w d\theta \Big|^2 e^{\mu t_0} dx;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta} D^\beta w, D^\alpha \psi)\, dx \geqslant \frac{a_0}{2} \int\limits_{\Omega_{t_0}} \sum_{|\alpha|=m} \Big| \int\limits_{t_0}^\tau D^\alpha w d\theta \Big|^2 e^{\mu t_0} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (\mu a_0 - a_1(t)) \sum_{|\alpha|=m} \Big| \int\limits_t^\tau D^\alpha w d\theta \Big|^2 e^{\mu t} dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (B_\alpha D^\alpha w, \psi)\, dxdt \geqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big| \int\limits_{t_0}^\tau w d\theta \Big|^2 e^{\mu t_0} dx -$$

$$- \frac{b_0(\tau)\gamma_0}{2} \int\limits_{\Omega_{t_0}} \sum_{|\alpha|=m} \Big| \int\limits_{t_0}^\tau D^\alpha w d\theta \Big|^2 e^{\mu t_0} dx - \frac{\delta_0}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big| \int\limits_t^\tau w d\theta \Big|^2 e^{\mu t} dxdt -$$

$$- \frac{\delta_1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |w|^2 e^{\mu t} dxdt - \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{b_0(\tau)}{\delta_1} + \frac{b_1(\tau)}{\delta_0} \right) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=m} \Big| \int\limits_t^\tau D^\alpha w d\theta \Big|^2 e^{\mu t} dxdt,$$

$$\delta_0 > 0,\ \delta_1 > 0;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (C w_t, \psi)\, dxdt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |w|^2 e^{\mu t} dxdt - \frac{\bar{c}_0 |\tau|}{2} \int\limits_{\Omega_{t_0}} \left(|w|^2 + \Big| \int\limits_{t_0}^\tau w d\theta \Big|^2 \right) e^{\mu t_0} dx -$$

$$- \frac{\mu \bar{c}_0(\tau)}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left(\frac{1}{\delta_2} |w|^2 + \delta_2 \Big| \int\limits_t^\tau w d\theta \Big|^2 \right) e^{\mu t} dxdt -$$

$$- \frac{c_1(\tau)}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left(|w|^2 + \Big| \int\limits_t^\tau w d\theta \Big|^2 \right) e^{\mu t} dxdt, \quad \delta_2 > 0;$$

$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{j\in M_1} g_j (|u_j|^{p_j-2} - u_j - |v_j|^{p_j-2} v_j) \psi_j dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\bar{q}_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{j\in M_1} (p_j - 1) |w| |\psi_j| (|u_j|^{p_j-2} + |v_j|^{p_j-2}) dxdt.$$

Пусть для определенности имеем $n > 2m$. Выберем тогда число $q = \frac{2n}{n-2m}$. Поскольку $\frac{m}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{q} = 1$, то в силу неравенства Гельдера, а также оценки (4) получим неравенство

$$\mathcal{I}_1 \geqslant -\frac{1}{2} \bar{q}_0 p_0 \nu_2 \nu_3(\tau) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} e^{\mu t} \left(|w|^2 + \sum_{|\alpha|=m} \Big| \int\limits_t^\tau D^\alpha w d\theta \Big|^2 \right) dxdt.$$

Здесь $p_0 = \max\limits_{j \in M_1} (p_j - 1)$; $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$;

$$\nu_3(\tau) = \max_{j \in M_1} \sup_{(-\infty, \tau]} \left(\int_{\Omega_t} \left(|u_j|^{p_j - 2} + |v_j|^{p_j - 2} \right)^{\frac{n}{m}} dx \right)^{\frac{m}{n}}.$$

Заметим, что из условий теоремы следует $\lim\limits_{t \to -\infty} \nu_3(t) = 0$. Если теперь учесть полученные выше оценки, то из равенства (6) мы придем к неравенству

$$\int_{\Omega_\tau} |w|^2 e^{\mu\tau} dx + \int_{Q_{t_0,\tau}} \Bigg[\Big(2c_0 - 3\mu - \delta_1 - \frac{\mu \bar{c}_0(\tau)}{\delta_2} - c_1(\tau) - \bar{q}_0 p_0 \nu_2 \nu_3(\tau)\Big) |w|^2 +$$

$$+ \left(\mu a_0 - a_1(t) - \frac{b_0(\tau)\gamma_0}{\delta_1} - \frac{b_1(\tau)\gamma_0}{\delta_0} - \bar{q}_0 p_0 \nu_2 \nu_3(\tau) \right) \sum_{|\alpha| = m} \left| \int_t^\tau D^\alpha w d\theta \right|^2 +$$

$$+ (\mu^3 - \delta_0 - \mu \bar{c}_0(\tau)\delta_2 - c_1(\tau)) \left| \int_t^\tau w d\theta \right|^2 \Bigg] e^{\mu t} dx dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_{t_0}} \Bigg[|w_t|^2 + (\mu + 1 + \bar{c}_0(\tau)) |w|^2 + (\mu + 2 - \mu^2 +$$

$$+ \bar{c}_0(\tau)) \left| \int_{t_0}^\tau w d\theta \right|^2 + (b_0(\tau)\gamma_0 - a_0) \sum_{|\alpha| = m} \left| \int_{t_0}^\tau D^\alpha w d\theta \right|^2 \Bigg] e^{\mu t_0} dx. \tag{7}$$

Согласно условиям теоремы теперь можем выбрать такие числа $\tau_0 \leqslant T$, $\mu > 0$, δ_0, δ_1, δ_2, что для всех $\tau \leqslant \tau_0$ будут справедливы неравенства

$$2c_0 - 3\mu - \delta_1 - \frac{\mu \bar{c}_0(\tau)}{\delta_2} - c_1(\tau) - \bar{q}_0 \nu_2 p_0 \nu_3(\tau) \geqslant 0;$$

$$\mu a_0 - \mu \delta_2 \gamma_0 \bar{c}_0(\tau) - a_1(\tau) - \frac{b_0(\tau)\gamma_0}{\delta_1} - \frac{b_1(\tau)\gamma_0}{\delta_0} - \bar{q}_0 p_0 \nu_2 \nu_3(\tau) \geqslant 0;$$

$$\mu^3 - \delta_0 - c_1(\tau) \geqslant 0.$$

Кроме того, легко убедиться, что

$$\int_{\Omega_{t_0}} \left(|w_t|^2 + |w|^2 + \sum_{|\alpha| = m} \left| \int_{t_0}^\tau D^\alpha w d\theta \right|^2 \right) e^{\mu t_0} dx \to 0,$$

если $t_0 \to -\infty$. Поэтому из неравенства (7) следует оценка

$$\int_{\Omega_\tau} |w|^2 e^{\mu\tau} dx \leqslant 0, \quad \tau \leqslant \tau_0.$$

Отсюда получаем, что $w \equiv 0$ в Q_{τ_0}. Далее легко доказать тем же методом, что $w \equiv 0$ в $Q_{\tau_0, T}$. Аналогично доказывается теорема и в случае, когда $M_1 = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$, $B_\varkappa$, C, $G \in L^\infty(Q_T)$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant m$, $1 \leqslant |\varkappa| \leqslant m$; $\lim\limits_{t \to -\infty} a_1(t) = 0$; $\partial\Omega \in C^1$; выполняются условия 1)—3); $p_j - 2 < \frac{2m}{n - 2m}$, если $n > 2m$, и $p_j > 2$, если $n \leqslant 2m$, $j \in M_1$.

Тогда если $c_0 \leqslant 0$, $M_1 \neq \varnothing$, то задача (1), (2) не может иметь более одного решения в классе функций $u(x, t)$, таких, что $u \in L^\infty(\mathcal{I}; V)$, $u_t e^{-\frac{\nu_0 t}{2}} \in L^\infty(\mathcal{I}; \overset{0}{H}{}^m_k(\Omega))$, $u_{tt} e^{-\frac{\nu_0 t}{2}} \in L^\infty(\mathcal{I}; L^2_k(\Omega))$, где $\nu_0 > -c_0 + \sqrt{c_0^2 + \frac{\bar{b}_0 \gamma_0}{a_0}}$, $\bar{b}_0 = \inf b_0(t)$. Если же $a_1(t) \equiv 0$, $b_0(t) \equiv 0$, $c_0 = 0$, $M_1 = \varnothing$, то задача (1), (2) не может иметь более одного решения в классе функций $u(x, t)$, таких, что

$$u_t \in L^\infty(\mathcal{I}; \overset{0}{H}{}^m_k(\Omega)), \; u_{tt} \in L^\infty(\mathcal{I}; L^2_k(\Omega)),$$

$$\int_{\Omega_t} \left(|u_t|^2 + \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha u|^2 \right) dx \to 0, \text{ если } t \to -\infty.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1, если взять в качестве функции $\psi(x, t)$ функцию $w_l(x, t)$.

Пример. Рассмотрим задачу

$$u_{tt} + 2c_0 u_t - u_{xx} = 0,$$
$$u(0, t) = 0, \; u(1, t) = 0 \tag{8}$$

в области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, \; -\infty < t < T.\}$ Легко убедиться, что функция

$$u_l(x, t) = e^{-c_0 t} \cos \sqrt{l^2\pi^2 - c_0^2}\, t \sin l\pi x$$

является решением задачи (8) для любого натурального числа l, такого, что $c_0^2 \leqslant l^2\pi^2$, причем $u_{lt} e^{c_0 t} \in L^\infty(J; \overset{0}{H}{}^1(0, 1))$, $u_{ltt} e^{c_0 t} \in L^\infty(\mathscr{I}; L^2(0, 1))$. Следовательно, если в теореме 2 $\bar{b}_0 = 0$, $v_0 = -2c_0$, то задача (1), (2) может иметь более одного решения в соответствующем классе функций. Если же $c_0 = 0$, то без дополнительного условия, что

$$\int_{\Omega_t} \Big(|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \Big) dx \to 0,$$

когда $t \to -\infty$, задача (1), (2) также может иметь неединственное решение. Таким образом, условия теоремы 2 являются близкими к необходимым.

Замечание. Аналогичные результаты получены в случае, когда Ω — неограниченная область.

1. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1989.— Вып. 14.— С. 3—44.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1972.— 736 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных задач.— М. : Мир, 1972.— 588 с.
4. *Ивасишен С. Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн.— 1982.— 34, № 5.— С. 547—552.
5. *Кадыров Р. Р., Жураев Б. Б.* О классах единственности решений краевых задач без начальных условий для параболических уравнений высокого порядка // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1989.— № 2.— С. 23—29.
6. *Лавренюк С. П.* Задача для одного эволюционного уравнения в полуограниченном по времени цилиндре // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 11.— С. 1481—1468.
7. *Курта В. В., Шишков А. Е.* Классы единственности решений граничных задач для недивиргентных параболических уравнений второго порядка в нецилиндрических областях // Там же.— № 7.— С. 924—930.
8. *Кирилич В. М., Мишкіс А. Д.* Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1991.— № 5.— С. 8—10.
9. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.

Львов. ун-т

Получено 25.12.91